

TAUBERIAN THEOREM OF LAPLACE
TRANSFORMATION
AND
APPLICATION OF PRIME NUMBER THEOREM

LAHOUCINE ELAISSAOUI

lahoucine.elaissaooui@stud-mail.uni-wuerzburg.de
lahoumaths@gmail.com

March 3, 2014

RÉSUMÉ

Dans cet article je donnerai une nouvelle démonstration courte et directe pour le Théorème des Nombres Premiers. C'est vrai que ce théorème a été complètement démontré au début du 20ème siècle mais la démonstration était basé sur des résultats élémentaires (théorème de **Chebyshev**) et aussi analytiques compliqués (théorème de **Ikehara**), mais ici j'ai pas utilisé le théorème de Chebyshev ainsi que j'ai remplacé et j'ai généralisé le théorème de **Ikehara** grâce à la notion des fonctions à variation bornée qui est ancienne mais récent dans la théorie analytique des nombres.

1 PRÉLIMINAIRES

1.1 Les fonctions à variation bornée

Les fonctions à variation bornée joue un rôle très important dans la théorie de l'intégration au sens de **Stieltjes**, ici on va s'intéresser à les fonctions à variation bornée sur \mathbb{R}^+ à valeurs complexes. Soit x un réel positif et soit $(x_k)_{k=0, \dots, n}$ une suite finie et strictement croissante des réels de l'intervalle $[0, x]$ tels que $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x$ est une subdivision de l'intervalle $[0, x]$, on note Σ pour cette subdivision et $\mathcal{S}([0, x])$ l'ensemble de toutes les subdivisions possibles de $[0, x]$. La fonction variation totale d'une fonction complexe définie sur \mathbb{R}^+ , notée T_f , est la fonction définie par

$$T_f(x) := \sup_{\Sigma \in \mathcal{S}([0, x])} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \quad (1)$$

Il est bien clair que la fonction T_f est une fonction croissante sur \mathbb{R}^+ , par conséquent si T_f est majorée sur \mathbb{R}^+ alors on dira que f est à *variation bornée* sur \mathbb{R}^+ et on note

$$V(f) = \lim_{x \rightarrow +\infty} T_f(x) \in \mathbb{R}^+$$

pour la *variation totale* de la fonction f .

Propriétés 1.1

- Toute fonction g de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ à valeurs complexes telle que $g' \in L^1(\mathbb{R}^+)$ est à variation bornée, en effet, pour une subdivision $\Sigma : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$ et puisque g est continue sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ (pour $i = 1, \dots, n$) et dérivable sur leurs intérieurs topologique alors d'après le théorème des accroissements finis il existe des c_i dans $]x_{i-1}, x_i[$ tels que

$$|g(x_i) - g(x_{i-1})| = |g'(c_i)| |x_i - x_{i-1}|$$

D'où

$$T_g(x) = \sup_{\Sigma \in \mathcal{S}([0, x])} \sum_{k=1}^n |g'(c_k)| |x_k - x_{k-1}|$$

Or cette somme est une somme de **Darboux** ce qu'on peut déduire grâce à l'intégrale de **Riemann** que

$$T_g(x) = \int_0^x |g'(t)| dt$$

Donc

$$V(g) = \int_0^{+\infty} |g'(t)| dt$$

qui est finie puisque $g' \in L^1(\mathbb{R}^+)$, alors g est à variation bornée sur \mathbb{R}^+ .

- toute fonction à variation bornée sur \mathbb{R}^+ est bornée sur \mathbb{R}^+ , en effet, soit f une fonction à variation bornée sur \mathbb{R}^+ alors pour un $x \geq 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left| \sum_{k=1}^n f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &\leq T_f(x) \\ &\leq V(f) < +\infty \end{aligned}$$

Alors f est bornée sur \mathbb{R}^+ .

On dit qu'une fonction f définie de \mathbb{R}^+ à valeurs complexes admet une limite à gauche en $x \in \mathbb{R}^+$, notée $f(x^-)$ si à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un $0 \leq \delta < x$ tel que

$$a < t < x \implies |f(t) - f(x^-)| < \varepsilon$$

Et en plus si $f(x^-) = f(x)$ on dit que f est continue à gauche en x .

On note pour $\mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$ la classe des fonctions, définies de \mathbb{R}^+ à valeurs complexes, à variation bornée, continues à gauche en tout point de \mathbb{R}^+ et qui s'annulent en 0.

1.2 Intégrale de Lebesgue-Stieltjes

Le théorème 8.14 page 156 du livre [Rud] a établi le lien entre la théorie de la mesure et la théorie des fonctions à variation bornée. Donc d'après le même théorème, soit $f \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$ alors il existe une unique mesure complexe de Borel μ_f telle que

$$f(x) = \mu_f([0, x]), \quad \forall x \geq 0 \quad (2)$$

Et en plus pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a

$$T_f(x) = |\mu_f|([0, x]) \quad (3)$$

Où $|\mu_f|$ est une mesure positive de Borel, dite la *variation totale de la mesure complexe* μ_f , qui est finie d'après le théorème 6.4 page 114 de [2].

Remarque 1.1

- On peut facilement montrer que $|\mu_f|$ est finie autant que $f \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$, en effet, soit $f \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$ alors

$$\begin{aligned} |\mu_f|(\mathbb{R}^+) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} |\mu_f|([0, x]) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} T_f(x) \\ &= V(f) < +\infty \end{aligned}$$

- D'une autre part, si f est à valeurs dans \mathbb{R} alors μ_f est dite une mesure signée alors de la même manière on démontre que cette mesure est finie.
- Soit $f \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$, si $y > x$ alors

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \mu_f([0, y]) - \mu_f([0, x]) \\ &= \mu_f([x, y]) \end{aligned}$$

Donc

$$\mu_f(\{x\}) = f(x^+) - f(x)$$

D'où f est continue en x si et seulement si

$$\mu_f(\{x\}) = 0$$

Le théorème de **Radon-Nikodym**, voir le théorème 6.12 page 120 de [2], assure que pour toute mesure complexe μ il existe une fonction mesurable complexe h de module égal à 1 telle que

$$d\mu = h d|\mu|.$$

Ainsi, on déduit que pour toute fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable et bornée sur \mathbb{R}^+ on a $g \in L^1_{\mu_f}(\mathbb{R}^+)$ où $f \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$. En effet:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^+} g d\mu_f \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^+} |g| d|\mu_f| \\ &\leq \|g\|_{\infty} |\mu_f|(\mathbb{R}^+) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Où

$$\|g\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |g(x)|.$$

Maintenant, d'après le théorème 6.1.4 du livre [1] on constate que pour $f \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$ on a

$$\int_0^x df(t) = \mu_f([0, x]), \quad x \geq 0 \quad (4)$$

Soient donc $f \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ telle que $g' \in L^1(\mathbb{R}^+)$, alors d'après le théorème 6.2.2 (grâce au résultat 4) du même livre on démontre que

$$\int_0^{+\infty} g(t) df(t) = \mu_{fg}(\mathbb{R}^+) - \int_0^{+\infty} f(t) g'(t) dt \quad (5)$$

la mesure complexe μ_{fg} a bien un sens, en effet d'après les propriétés 1.1 on démontre que g est à variation bornée or le produit de deux éléments de $\mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$ est un élément de $\mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$ alors $fg \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g$ (car fg est à variation bornée et continue à gauche à chaque point de \mathbb{R}^+ et $(fg)(0) = 0$), et en plus

$$\mu_{fg}([0, x]) = f(x)g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Et

$$|\mu_{fg}(\mathbb{R}^+)| \leq |\mu_{fg}|(\mathbb{R}^+) = \lim_{x \rightarrow +\infty} T_{fg}(x) < +\infty$$

2 Théorème Tauberien de la transformation de Laplace complexe

Dans tout ce qui suit $s = \sigma + it$ où $\sigma, t \in \mathbb{R}$ est un nombre complexe et ρ est une fonction de la classe $\mathcal{V}_b\mathcal{C}_g^* := \{f \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g, \Im(f) = 0\}$. Ainsi \mathbb{C}_*^+ est l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement positive.

On définit la transformation de Laplace-Stieltjes de la fonction ρ par

$$\mathcal{L}_\rho^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} d\rho(x), \quad \sigma > 0$$

il est bien clair d'après ce qui précède, puisque $x \mapsto e^{-sx}$ est continue et bornée sur \mathbb{R}^+ pour tout $\sigma > 0$, que la fonction \mathcal{L}_ρ^* est bien définie.

LEMME 2.1

Soit $\rho \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g^*$ alors

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{L}_\rho^*(s) = \lim_{+\infty} \rho.$$

PREUVE:

On pose pour tout $(x, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}_+^*$

$$\phi(x, s) = e^{-sx}$$

Alors on a

- Pour tout $x \geq 0$ la fonction $s \mapsto \phi(x, s)$ est continue en 0^+ .
- Pour tout $\sigma > 0$ la fonction $x \mapsto \phi(x, s)$ est continue donc mesurable sur \mathbb{R}^+ .
- Pour tout $\sigma > 0$ et pour $d\rho$ -presque tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a

$$|\phi(x, s)| \leq 1$$

Où $1 \in L_{d\rho}^1(\mathbb{R}^+)$ car

$$\int_{\mathbb{R}^+} d\rho(x) = \mu_\rho(\mathbb{R}^+) < +\infty$$

Alors la fonction $x \mapsto \phi(x, s)$ est $d\rho$ -intégrable sur \mathbb{R}^+ et la fonction \mathcal{L}_ρ^* est continue en 0^+ . Donc

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{L}_\rho^*(s) &= \mathcal{L}_\rho^*(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} d\rho(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_\rho([0, x]) && \text{d'après 4} \\ &= \lim_{+\infty} \rho && \text{d'après 2} \end{aligned}$$

■

Maintenant on définit la transformation de Laplace complexe d'une fonction $\rho \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g^*$ par

$$\mathcal{L}_\rho(s) = \int_0^{+\infty} \rho(x) e^{-sx} dx, \quad \sigma > 0.$$

La fonction \mathcal{L}_ρ est bien définie, en effet puisque $\rho \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g^*$ alors ρ est bornée sur \mathbb{R}^+ en plus

$$\left| \int_0^{+\infty} \rho(x) e^{-sx} dx \right| \leq \|\rho\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-\sigma x} dx = \frac{\|\rho\|_\infty}{\sigma} < +\infty$$

THÉORÈME 2.1

Soit $\rho \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g^*$, on suppose que \mathcal{L}_ρ est holomorphe sur $\{\sigma > 0\}$ et admet un prolongement analytique sur $\{\sigma \geq 0\}$ avec un pôle simple au point 0. Alors on a

$$\lim_{+\infty} \rho = \text{Res}(\mathcal{L}_\rho, 0).$$

PREUVE:

Soit $s \in \mathbb{C}_+^*$, d'après l'équation 5 on a

$$\mathcal{L}_\rho^*(s) = \mu_{\rho e^{-s \cdot}}(\mathbb{R}^+) + s \int_0^{+\infty} \rho(x) e^{-sx} dx$$

Or

$$|\mu_{\rho e^{-s \cdot}}(\mathbb{R}^+)| = |\mu_\rho(\mathbb{R}^+)| \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sigma x} = 0$$

Donc

$$\mathcal{L}_\rho^*(s) = s \mathcal{L}_\rho(s)$$

Passons à la limite $s \rightarrow 0^+$ on a d'après le LEMME 3.1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = \text{Res}(\mathcal{L}_\rho, 0)$$

■

D'une manière générale, soit α un réel positif alors il est clair, d'après ce qui précède, que pour tout $\rho \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g^*$ on a $\varrho(x) = \rho(x)e^{-\alpha x}$ est un élément de $\mathcal{V}_b\mathcal{C}_g^*$. Ainsi on déduit le résultat suivant:

COROLLAIRE 2.1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $\rho \in \mathcal{V}_b\mathcal{C}_g^*$. On suppose que la fonction \mathcal{L}_ρ est holomorphe sur $\{\sigma > \alpha\}$ et admet un prolongement analytique sur $\{\sigma \geq \alpha\}$ avec un seul pôle simple en $s = \alpha$ alors on a

$$\rho(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Res}(\mathcal{L}_\rho, \alpha) e^{\alpha x}.$$

PREUVE:

Soit $\sigma > \alpha$, alors

$$\mathcal{L}_\rho(s) = \int_0^{+\infty} \rho(x) e^{-sx} dx = \int_0^{+\infty} \rho(x) e^{-\alpha x} e^{-(s-\alpha)x} dx$$

On pose

$$\varrho(x) = \rho(x) e^{-\alpha x}, \quad \forall x \geq 0.$$

Alors

$$\mathcal{L}_\rho(s) = \int_0^{+\infty} \varrho(x) e^{-(s-\alpha)x} dx = \mathcal{L}_\varrho(s - \alpha)$$

Donc

$$(s - \alpha) \mathcal{L}_\rho(s) = (s - \alpha) \mathcal{L}_\varrho(s - \alpha) = z \mathcal{L}_\varrho(z)$$

D'où quand $s \rightarrow \alpha$ on aura $z \rightarrow 0$ et d'après le THÉORÈME 2.1 on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varrho(x) = \text{Res}(\mathcal{L}_\varrho(z), z = 0) = \text{Res}(\mathcal{L}_\rho, \alpha)$$

Alors

$$\rho(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Res}(\mathcal{L}_\rho, \alpha) e^{\alpha x}.$$

■

3 Théorème des Nombres Premiers (nouvelle démonstration)

Soit $\chi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction arithmétique positive, on pose pour tout $x \in (1, +\infty)$

$$f(x) = \sum_{1 \leq n < x} \chi(n) \quad \text{et} \quad f(1) = 0.$$

Il est clair que la fonction f est croissante sur $[1, +\infty)$ et continue à gauche en tout point de $[1, +\infty)$. Ainsi, les points de discontinuité de f sont des éléments de \mathbb{N}^* . Si f est continue en $x \in \mathbb{N}^*$ alors on aura

$$f(x^+) = f(x)$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^+) - f(x) \\ &= \sum_{x \leq n < x^+} \chi(n) \\ &= \chi(x) \end{aligned}$$

Alors

$$f \text{ est continue en } x \in \mathbb{N}^* \iff \chi(x) = 0 \quad (6)$$

Soit maintenant $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante des points de discontinuité de la fonction f sur $[1, +\infty)$ alors f est constante sur chaque intervalle $I_k = (a_{k-1}, a_k]$ (où $k \in \mathbb{N}^*$). En effet, soit $k \in \mathbb{N}^*$ s'il existe $n \in I_k$ tel que f est continue en n alors d'après 6 $\chi(n) = 0$ ainsi et d'une manière générale soit $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante des entiers de I_k (l'intérieur de I_k), alors f est continue en chaque β_i d'où $\chi(\beta_i) = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots$ et en conséquent pour tout $x \in (a_{k-1}, a_k]$ on a $f(x) = f(a_{k-1}^+)$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Soient $\alpha > 1$ un réel et ρ la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$\rho(x) = f(e^x) e^{-\alpha x}.$$

Soit k un entier strictement positif on note $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour la suite croissante des points de discontinuité de la fonction ρ sur \mathbb{R}^+ ($\lambda_k = \log a_k \in \log \mathbb{N}^*$). Alors la fonction ρ est décroissante sur chaque intervalle $J_k = (\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, en effet: soient $x, y \in J_k$ tels que $x > y$, donc puisque f est constante ($\equiv c_k$) sur J_k alors $\rho(x) - \rho(y) = c_k (e^{-\alpha x} - e^{-\alpha y}) < 0$ d'où ρ est strictement décroissante sur J_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. D'une autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\rho(\lambda_k^+) > \rho(\lambda_k).$$

En effet, puisque la fonction $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est continue sur \mathbb{R}^+ alors $e^{-\alpha \lambda_k^+} = e^{-\alpha \lambda_k}$ donc

$$\rho(\lambda_k^+) - \rho(\lambda_k) = (f(a_k^+) - f(a_k)) e^{-\alpha \lambda_k}$$

et puisque f est discontinue en a_k et croissante sur $[1, +\infty)$ alors $f(a_k^+) > f(a_k)$. D'où

$$\rho(\lambda_k^+) > \rho(\lambda_k).$$

LEMME 3.1

Soit $\alpha > 1$ alors

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^\alpha} < +\infty \implies \rho \in \mathcal{V}_b \mathcal{C}_g^*$$

PREUVE:

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$ une subdivision de l'intervalle $[0, x]$ et on note pour m le plus grand entier naturel non nul tel que $\lambda_{m-1} < x \leq \lambda_m$ où les $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont les points de discontinuité de la fonction ρ définis précédemment, alors

$$\sum_{i=1}^n |\rho(x_i) - \rho(x_{i-1})| = \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in J_k}}^n |\rho(x_i) - \rho(x_{i-1})|$$

où $(J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont les intervalles $(\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ et $J_0 = [0, \lambda_0]$, et on note bien que $\cup_{k=0}^m J_k = [0, \lambda_m]$ donc puisque ρ est strictement décroissante sur chaque J_k alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in J_k}}^n |\rho(x_i) - \rho(x_{i-1})| &\leq \rho(0) - \rho(\lambda_0) + \sum_{k=1}^m (\rho(\lambda_{k-1}^+) - \rho(\lambda_k)) - (\rho(x) - \rho(\lambda_m)) \\
 &= -\rho(\lambda_0) + \rho(\lambda_0^+) - \rho(\lambda_1) + \rho(\lambda_1^+) + \cdots - \rho(\lambda_m) - \rho(x) + \rho(\lambda_m) \\
 &= -\rho(x) + \sum_{k=0}^{m-1} (\rho(\lambda_k^+) - \rho(\lambda_k)) \\
 &= -\rho(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(a_k^+) - f(a_k)}{a_k^\alpha} \\
 &= -\rho(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\chi(a_k)}{a_k^\alpha}
 \end{aligned}$$

Où les $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont les points de discontinuité de la fonction f et qui sont des éléments de \mathbb{N}^* . Donc

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\chi(a_k)}{a_k^\alpha} \leq \sum_{1 \leq \ell < e^x} \frac{\chi(\ell)}{\ell^\alpha}$$

D'où

$$\sum_{i=1}^n |\rho(x_i) - \rho(x_{i-1})| \leq -\rho(x) + \sum_{1 \leq \ell < e^x} \frac{\chi(\ell)}{\ell^\alpha}.$$

Alors

$$T_\rho(x) \leq -\rho(x) + \sum_{1 \leq \ell < e^x} \frac{\chi(\ell)}{\ell^\alpha}.$$

Or puisque ρ est une fonction positive alors

$$T_\rho(x) \leq \sum_{1 \leq \ell < e^x} \frac{\chi(\ell)}{\ell^\alpha}.$$

Donc

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^\alpha} \text{ converge} \implies \rho \in \mathcal{V}_b \mathcal{C}_g^*.$$

■

Sans perte de généralité le résultat est vrai pour toute fonction arithmétique $\chi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Dans ce cas, le LEMME 3.1 peut être reformulé:

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^\alpha} \text{ est absolument convergente} \implies \rho \in \mathcal{V}_b \mathcal{C}_g^*.$$

où $\alpha > 1$.

Maintenant on arrive au résultat le plus important dans cette section:

THÉORÈME 3.1

Soit $\chi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction arithmétique et soit $\alpha > 1$ le plus petit réel tel que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^\alpha}$ soit convergente. On pose $f(x) = \sum_{1 \leq n < x} \chi(n)$ pour tout $x \geq 1$ où $f(1) = 0$ et on suppose que \mathcal{L}_ρ est holomorphe sur le demi-plan complexe $\{\sigma \geq \beta\}$ sauf au seul pôle simple en $s = \beta \geq 0$ alors on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Res}(\mathcal{L}_\rho, \beta) x^{\alpha+\beta}.$$

Où $\rho(x) = f(e^x) e^{-\alpha x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

PREUVE:

Soit $\alpha > 1$ un réel tel que la série du terme générale $\frac{\chi(n)}{n^\alpha}$ est convergente alors, d'après le LEMME 3.1, la fonction $\rho(x) = f(e^x) e^{-\alpha x}$ est un élément de $\mathcal{V}_b \mathcal{C}_g^*$. Or d'après le COROLLAIRE 2.1 on déduit que

$$\rho(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Res}(\mathcal{L}_\rho, \beta) e^{\beta x}.$$

Ce qui est

$$f(e^x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Res}(\mathcal{L}_\rho, \beta) e^{(\alpha+\beta)x}.$$

D'où

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Res}(\mathcal{L}_\rho, \beta) x^{\alpha+\beta}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

On rappelle que la fonction Λ de **Von Mangoldt** est une fonction arithmétique définie sur \mathbb{N}^* par

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \quad k \in \mathbb{N}^*, p \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction définie pour tout $x \in [1, +\infty)$ tel que $x \neq p^k$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathcal{P}$ par $\psi(x) = \sum_{n < x} \Lambda(n)$ est dite la fonction de **Chebyshev**, ainsi pour démontrer le théorème des nombres premiers il faut et il suffit de démontrer que

$$\psi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x.$$

Il existe une forte relation entre la fonction ζ de **Riemann** et la fonction ψ , en effet

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s \int_0^{+\infty} \psi(e^x) e^{-sx} dx, \quad \forall \sigma > 1.$$

On rappelle aussi que la fonction ζ est holomorphe sur $\{\sigma \geq 1\}$ sauf au $s = 1$ qui est le seul pôle simple de la fonction ζ , ainsi d'après **Hadamard** et **De La Vallée Poussin** la fonction ζ ne s'annule en aucun point du demi-plan $\{\sigma \geq 1\}$. Alors on déduit que la fonction $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ est holomorphe sur $\{\sigma \geq 1\}$ sauf au point $s = 1$ qui est le seul pôle simple de résidu égal à 1.

Et on a le **Théorème des Nombres Premiers**:

COROLLAIRE 3.1

$$\psi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x.$$

PREUVE:

Soit $\alpha > 1$ un réel donné, on pose

$$\rho(x) = \psi(e^x)e^{-\alpha x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Alors puisque la fonction $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ est holomorphe sur $\{\sigma > 1\}$ alors la série su terme général $\frac{\Lambda(n)}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 1$.

D'une autre part, soit $\sigma > 1$ alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho(s) &= \int_0^{+\infty} \rho(x)e^{-sx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \psi(e^x)e^{-\alpha x}e^{-sx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \psi(e^x)e^{-(s+\alpha)x} dx \\ &= -\frac{\zeta'(s+\alpha)}{(s+\alpha)\zeta(s+\alpha)} \end{aligned}$$

Alors puisque la fonction $s \mapsto -\frac{\zeta'(s+\alpha)}{(s+\alpha)\zeta(s+\alpha)}$ est holomorphe sur $\{\sigma \geq 1 - \alpha\}$ sauf au point $s = 1 - \alpha$ qui est le seul pôle simple de cette fonction où

$$\text{Res} \left(-\frac{\zeta'(s+\alpha)}{(s+\alpha)\zeta(s+\alpha)}, 1 - \alpha \right) = 1$$

Alors d'après le THÉORÈME 3.1 on a

$$\psi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{\alpha+1-\alpha}$$

C'est à dire

$$\psi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

References

- [1] M.Carter et B. Van Brunt, *The Lebesgue-Stieltjes Integral a practical introduction*, Springer (2000).
- [2] E.C. Titchmarsh, *The Theory of The Riemann Zeta-Function* 2nd ed, revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press (1986).
- [3] Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Troisième tirage MASSON Paris New York Barcelone Milan 1980.